

## Espacios Vectoriales con Producto Interior

**Definición 1** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ . Llamamos forma bilineal a toda aplicación

$$\begin{aligned} f : V \times V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto f(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

que verifica

$$\begin{aligned} 1. \quad & f(\vec{x}, \lambda \vec{y} + \mu \vec{z}) = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \mu f(\vec{x}, \vec{z}) \\ & \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \quad y \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \vec{z}) = \lambda f(\vec{x}, \vec{z}) + \mu f(\vec{y}, \vec{z}) \\ & \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \quad y \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Obsérvese que una forma bilineal es lineal para cada una de las componentes.

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  se dice que  $f$  es una forma bilineal real. En lo sucesivo nos restringimos a este caso.

**Ejemplos:** Las a.l.  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definidas

$$f[(a, b), (c, d)] = ac + bd$$

$$f[(a, b), (c, d)] = ad - bc$$

son bilineales.

**Ejemplo:** La función  $f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$  definida por

$$f(X, Y) = X^t A Y$$

con  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  es bilineal.

**Teorema 1** Sea  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineal. Entonces:

$$f(\vec{x}, \vec{0}) = f(\vec{0}, \vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in V$$

**Definición 2** Se dice que una forma bilineal  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  es simétrica si verifica que

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$$

**Ejemplo:** La forma bilineal  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = x_1 y_1 + x_2 y_2$  es simétrica.

**Definición 3** Se dice que una forma bilineal  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  es alternada (o antisimétrica) si verifica que

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = -f(\vec{y}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$$

**Proposición 1** Una forma bilineal es alternada si y sólo si  $f(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \quad \forall \vec{x} \in V$

**Ejemplo:** La forma bilineal  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = x_1 y_2 - x_2 y_1$  es antisimétrica.

## Matriz asociada a una forma bilineal en una base $\mathcal{B}$

**Definición 4** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , y sea  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineal.

Si  $\mathcal{B}_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  es una base de  $V$  entonces, dados dos vectores  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  tenemos que

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = X^t A Y =$$

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} f(\vec{v}_1, \vec{v}_1) & \cdots & f(\vec{v}_1, \vec{v}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\vec{v}_n, \vec{v}_1) & \cdots & f(\vec{v}_n, \vec{v}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde la matriz  $A = (f(\vec{v}_i, \vec{v}_j))$  de orden  $n$  definida sobre  $\mathbb{K}$  recibe el nombre de matriz de la forma bilineal  $f$  en la base  $\mathcal{B}_V$  y las matrices  $X$  e  $Y$  son las coordenadas de los vectores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , en la base  $\mathcal{B}_V$ .

**Ejercicio:** Sea  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal definida como

$$\begin{aligned} f[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] &= \\ &= 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 6x_1y_3 + x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 \end{aligned}$$

Calcular la expresión matricial de  $f$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  y en la base

$$\mathcal{B} = \{(2, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

**Teorema 2** Sea  $V$  un e.v. de dimensión  $n$  sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  y sea  $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineal. Si  $A_1$  es la matriz asociada a  $f$  en la base  $\mathcal{B}_1$  de  $V$  y  $A_2$  es la matriz asociada a  $f$  en la base  $\mathcal{B}_2$  de  $V$  entonces se verifica que

$$A_2 = P^t A_1 P$$

donde  $P$  es la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}_2$  a  $\mathcal{B}_1$ . ( $A_1$  y  $A_2$  son matrices congruentes).

**Ejemplos:** Comprobarlo en el ejercicio anterior y en la forma bilineal  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\begin{aligned} f[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] &= \\ &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2 \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{B}_1$  es la base canónica y  $\mathcal{B}_2 = \{(0, 1), (-1, 2)\}$

## Producto escalar

**Definición 5** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  y  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  una forma bilineal. Decimos que  $f$  es una forma bilineal definida positiva si verifica:

$$f(\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in V, \vec{x} \neq \vec{0}$$

**Definición 6** Sea  $V$  un espacio vectorial definido sobre el cuerpo de los números reales. Llamamos producto escalar a toda forma bilineal  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  simétrica y definida positiva.

**Definición 7** Llamamos espacio vectorial euclídeo a un espacio vectorial real en el que se ha definido un producto escalar.

Dados dos vectores  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ , su producto escalar  $f(\vec{x}, \vec{y})$ , suele notarse de distintas formas:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (\vec{x} | \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

## Ejemplos

1. Sea  $V = \mathbb{R}^n$ . Sean  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$  dos vectores con coordenadas en la base canónica  $\{x_1, \dots, x_n\}$  y  $\{y_1, \dots, y_n\}$  respectivamente. Se define un producto escalar como

$$\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

2. Sea  $V$  el e.v. sobre  $\mathbb{R}$  de las funciones reales que son continuas en el intervalo  $[a, b]$ . Se puede definir el producto escalar de dos funciones  $f, g \in V$  como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

3. Sea  $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ . Podemos definir el producto escalar de dos polinomios

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

como

$$\langle p(x), q(x) \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n$$

**Teorema 3** *Determinación de un producto escalar. Sea  $V$  un e.v. euclídeo y  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  una base de  $V$ . Entonces el producto escalar de dos vectores cualesquiera,  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  queda determinado conociendo los productos escalares  $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$  de los vectores de  $\mathcal{B}$ .*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$$

Expresando matricialmente este resultado:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = X^t G Y =$$

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{v}_n, \vec{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{v}_n, \vec{v}_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde  $G$  es la matriz asociada al producto escalar dado en la base  $\mathcal{B}$  o matriz de Gram.

**Ejercicio:** Sea  $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  con producto escalar

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

Hallar la matriz  $G$  asociada a dicho producto escalar en la base  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$



**Definición 8** Sea  $V$  un e.v. euclídeo. Llamamos norma, módulo o longitud de un vector  $\vec{x} \in V$  al número real:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

**Definición 9** Se dice que un vector  $\vec{x}$  es unitario o normalizado si  $\|\vec{x}\| = 1$ . Dado un vector  $\vec{x} \neq 0$  el vector  $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$  es unitario. Este proceso se llama normalización de  $\vec{x}$ .

**Proposición 2** Propiedades de la norma. Sea  $V$  un e.v. euclídeo, y sean  $\vec{x}, \vec{y} \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces:

1.  $\|\vec{x}\| = 0$  si y sólo si  $\vec{x} = 0$
2.  $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$
3.  $\|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$  (Desigualdad de Schwarz)
4.  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$  (Desigualdad triangular)

**Definición 10** Sean  $\vec{x}, \vec{y}$  dos vectores no nulos de un espacio vectorial euclídeo  $V$ . El ángulo que forman  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  se define:

$$ang(\vec{x}, \vec{y}) = \theta = \arccos \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{||\vec{x}|| ||\vec{y}||}$$

Utilizando la definición de ángulo podemos expresar el producto escalar de dos vectores de la forma:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = ||\vec{x}|| ||\vec{y}|| \cos \theta$$

**Definición 11** En un e.v. euclídeo  $V$  se dice que  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  son vectores ortogonales si

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

Observar que dos vectores no nulos  $\vec{x}, \vec{y}$  son ortogonales si y sólo si son perpendiculares, pues en este caso  $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ . Por ello si  $\vec{x}, \vec{y}$  son ortogonales suele notarse  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .

**Definición 12** *Conjunto ortogonal y conjunto ortonormal. Un conjunto de vectores no nulos  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  de un espacio vectorial euclídeo  $V$  se dice que es un conjunto ortogonal si cada vector del conjunto es ortogonal a todos los demás, es decir  $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ ,  $\forall i \neq j$ .*

*Diremos que dicho conjunto es ortonormal si además se verifica que los vectores que lo forman son unitarios.*

**Teorema 4** *Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo. Si  $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de  $V$ , entonces dicho conjunto es linealmente independiente.*

## Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

**Teorema 5** *En todo espacio vectorial euclídeo  $V$  de dimensión finita existe al menos una base ortonormal.*

Utilizamos un método constructivo, que partiendo de una base cualquiera  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  de  $V$  permite obtener una base ortogonal  $\mathcal{B}_f = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  de  $V$ .

Se definen los vectores desconocidos de  $\mathcal{B}_f$  como combinación lineal de los de  $\mathcal{B}$

$$\vec{e}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{e}_2 = \vec{v}_2 + a_{21}\vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 = \vec{v}_3 + a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2$$

$$\vdots$$

$$\vec{e}_n = \vec{v}_n + a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \dots + a_{n,n-1}\vec{e}_{n-1}$$

Los vectores  $\vec{e}_i, \vec{e}_j$  tienen que ser ortogonales ( $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$ ). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{v}_2 + a_{21}\vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle \\ &= \langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle + a_{21}\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle \end{aligned}$$

$$a_{21} = \frac{-\langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \vec{e}_3, \vec{e}_1 \rangle \\
&= \langle \vec{v}_3 + a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle \\
&= \langle \vec{v}_3, \vec{e}_1 \rangle + a_{31}\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + a_{32}\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle
\end{aligned}$$

$$a_{31} = \frac{-\langle \vec{v}_3, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle}$$

Calculando así cada uno de los coeficientes  $a_{ij}$  tenemos que:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \vec{v}_1 \\
\vec{e}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle} \vec{e}_1 \\
\vec{e}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle} \vec{e}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{e}_2 \rangle}{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle} \vec{e}_2 \\
&\vdots \\
\vec{e}_n &= \vec{v}_n - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle} \vec{e}_1 - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{e}_2 \rangle}{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle} \vec{e}_2 - \dots \\
&\quad \dots - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{e}_{n-1} \rangle}{\langle \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_{n-1} \rangle} \vec{e}_{n-1}
\end{aligned}$$

**Ejercicio** Sea  $V = \mathbb{R}^3$  con el producto escalar usual. Aplicar el método de Gram-Schmidt a la base  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ .

## Diagonalización Ortogonal

**Definición 13** Una matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es ortogonal si  $P^{-1} = P^t$ .

**Teorema 6** La matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es ortogonal si y sólo si las columnas (y filas) de  $A$  forman un conjunto ortonormal.

**Definición 14** La matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal  $P$ , tal que:

$$D = P^t A P$$

donde  $D$  es la matriz diagonal formada por los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de  $A$  y  $P$  es la matriz formada por una base de vectores propios que es ortonormal.

**Ejercicio.** Estudiar si la matriz  $A$  es diagonalizable y en caso afirmativo diagonalizarla ortogonalmente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

## Endomorfismos simétricos y Matrices Simétricas

**Definición 15** Sea  $V$  un e.v. euclídeo. Se dice que  $f: V \rightarrow V$  es un endomorfismo simétrico si  $\vec{x}.f(\vec{y}) = f(\vec{x}).\vec{y}$ ,  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ .

**Proposición 3** Si el e.v. euclídeo  $V$  tiene dimensión finita y si  $A$  es la matriz asociada a  $f$  en una base ortonormal de  $V$ , entonces  $f$  es simétrico si y sólo si  $A$  es simétrica.

**Teorema 7** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una matriz simétrica. Entonces los autovalores de  $A$  son siempre reales.

**Teorema 8** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es una matriz simétrica, entonces los autovectores que corresponden a autovalores distintos de  $A$  son ortogonales.

**Ejemplo** Comprobar que se verifican los dos teoremas anteriores para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Teorema 9 (espectral)** Sea  $V$  un e.v. euclídeo de dimensión finita  $n$ . Si  $f: V \rightarrow V$  es un endomorfismo simétrico, entonces existe una base ortonormal de  $V$  formada por vectores propios de  $f$ .

**Corolario 1** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  es una matriz simétrica, entonces  $A$  es diagonalizable en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $A$  es diagonalizable ortogonalmente.

**Ejemplo** Diagonalizar ortogonalmente la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$